Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Twierdzenie Talesa

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Cały odcinek AD ma długość $6+2=8$. Z podobieństwa trójkątów ABC i ADE mamy $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$, więc $DE=4\cdot\frac{8}{6}=\frac{16}{3}$. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. W trójkącie ABC punkty D na AB i E na AC spełniają DE równoległe do BC. Dane: $AD=6, AB=15, AE=9$. Oblicz AC.

Odpowiedź: $\frac{45}{2}$

Z Talesa $AD/AB=AE/AC$, więc $AC=9\cdot 15/6=\frac{45}{2}$.

2. Obwody podobnych trójkątów wynoszą 36 i 54. Pole mniejszego to 72. Oblicz pole większego.

Odpowiedź: 162

Przyjmijmy pomocniczo $k=3$. Skala wynosi 3/2, a skala pól 9/4. Pole większego to $8k^2\cdot 9/4=18k^2$ po podstawieniu k.

3. Ramiona kąta przecięto równoległymi BC i DE, z A-B-D oraz A-C-E. $AB=9, BD=6, BC=18$. Oblicz DE.

Odpowiedź: 30

$AD=15$. Skala $AD/AB=5/3$, zatem $DE=18\cdot 5/3=30$.

4. W trójkącie ABC odcinek DE równoległy do BC odcina przy A trójkąt o polu 81. Pole trapezu DBCE wynosi 144. Oblicz AD/AB.

Odpowiedź: $\frac{3}{5}$

Pole ABC to 225. Kwadrat skali to $81/225=9/25$, więc skala długości AD/AB to 3/5.

5. DE łączy środki boków AB i AC trójkąta ABC. Wykaż, że pole trapezu DBCE stanowi 3/4 pola ABC.

Odpowiedź: $\frac{3}{4}P_{ABC}$

Trójkąty ADE i ABC są podobne w skali 1/2. Pole ADE stanowi 1/4 pola całego trójkąta. Po odjęciu zostaje 3/4.

6. D i E są środkami BC i AC. Środkowe AD i BE przecinają się w G. Wykaż $AG=2GD$.

Odpowiedź: $AG=2GD$

Odcinek DE jest równoległy do AB i ma połowę jego długości. Trójkąty GDE i GAB są podobne (kąty wierzchołkowe i naprzemianległe). Stąd $GD/GA=DE/AB=1/2$, czyli $GA=2GD$.

2 / Małe kroki

1. Bok pierwszego trójkąta ma długość 9. Skala podobieństwa drugiego do pierwszego to 2. Oblicz odpowiadający bok.

Odpowiedź: 18

Długości mnożymy przez skalę 2.

2. Skala długości wynosi 3. Ile wynosi skala pól?

Odpowiedź: 9

Pola figur podobnych zmieniają się w kwadracie skali: $3^2=9$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Bok 3 powiększono w skali 3. Podaj długość obrazu.

Odpowiedź: 9

Mnożymy długość przez 3.

2. Skala pól to 16. Podaj dodatnią skalę długości.

Odpowiedź: 4

Skala długości jest dodatnim pierwiastkiem skali pól.

3. W podobnych trójkątach boki 6 i 15 odpowiadają sobie. Podaj skalę drugiego do pierwszego.

Odpowiedź: $\frac{5}{2}$

Dzielimy odpowiadającą długość w drugiej figurze przez długość w pierwszej.

4. Odcinek łączy środki dwóch boków trójkąta. Jaką częścią trzeciego boku jest jego długość?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Jest odcinkiem środkowym, równoległym i dwa razy krótszym od trzeciego boku.

Grupa B

1. Bok 4 powiększono w skali 3. Podaj długość obrazu.

Odpowiedź: 12

Mnożymy długość przez 3.

2. Skala pól to 16. Podaj dodatnią skalę długości.

Odpowiedź: 4

Skala długości jest dodatnim pierwiastkiem skali pól.

3. W podobnych trójkątach boki 8 i 20 odpowiadają sobie. Podaj skalę drugiego do pierwszego.

Odpowiedź: $\frac{5}{2}$

Dzielimy odpowiadającą długość w drugiej figurze przez długość w pierwszej.

4. Odcinek łączy środki dwóch boków trójkąta. Jaką częścią trzeciego boku jest jego długość?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Jest odcinkiem środkowym, równoległym i dwa razy krótszym od trzeciego boku.

Grupa C

1. Bok 5 powiększono w skali 3. Podaj długość obrazu.

Odpowiedź: 15

Mnożymy długość przez 3.

2. Skala pól to 16. Podaj dodatnią skalę długości.

Odpowiedź: 4

Skala długości jest dodatnim pierwiastkiem skali pól.

3. W podobnych trójkątach boki 10 i 25 odpowiadają sobie. Podaj skalę drugiego do pierwszego.

Odpowiedź: $\frac{5}{2}$

Dzielimy odpowiadającą długość w drugiej figurze przez długość w pierwszej.

4. Odcinek łączy środki dwóch boków trójkąta. Jaką częścią trzeciego boku jest jego długość?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Jest odcinkiem środkowym, równoległym i dwa razy krótszym od trzeciego boku.

Grupa D

1. Bok 6 powiększono w skali 3. Podaj długość obrazu.

Odpowiedź: 18

Mnożymy długość przez 3.

2. Skala pól to 16. Podaj dodatnią skalę długości.

Odpowiedź: 4

Skala długości jest dodatnim pierwiastkiem skali pól.

3. W podobnych trójkątach boki 12 i 30 odpowiadają sobie. Podaj skalę drugiego do pierwszego.

Odpowiedź: $\frac{5}{2}$

Dzielimy odpowiadającą długość w drugiej figurze przez długość w pierwszej.

4. Odcinek łączy środki dwóch boków trójkąta. Jaką częścią trzeciego boku jest jego długość?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Jest odcinkiem środkowym, równoległym i dwa razy krótszym od trzeciego boku.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Długości figur zmieniły się w skali 3.

Odpowiedź: 9

Pole zmienia się w kwadracie skali długości.

2. Bok wzrósł z 6 do 12.

Odpowiedź: 2

Skalę powiększenia liczymy jako nową długość podzieloną przez starą.

3. DE łączy środki AB i AC.

Odpowiedź: $P_{ABC}/4$

Połowa długości daje jedną czwartą pola.

Grupa B

1. Długości figur zmieniły się w skali 3.

Odpowiedź: 9

Pole zmienia się w kwadracie skali długości.

2. Bok wzrósł z 7 do 14.

Odpowiedź: 2

Skalę powiększenia liczymy jako nową długość podzieloną przez starą.

3. DE łączy środki AB i AC.

Odpowiedź: $P_{ABC}/4$

Połowa długości daje jedną czwartą pola.

5 / Matematyka w świecie

1. Plan wykonano w skali 1:100. Bok na planie ma 3 cm. Jaka jest rzeczywista długość w metrach?

Odpowiedź: 3 m

$3 \cdot 100$ cm to 3 m.

2. Nowy szyld jest podobny do starego w skali 2. Stary zużywał 3 jednostek folii. Ile zużyje nowy przy tej samej ilości folii na jednostkę pola?

Odpowiedź: 12

Pole rośnie czterokrotnie, więc zużycie folii również.

3. Na modelu preparatu podobny fragment ma bok 6 mm zamiast 3 mm. Ile razy większe jest pole jego obrazu?

Odpowiedź: 4

Skala długości to 2, więc skala pól 4.

4. Pole podobnej działki jest 9 razy większe. Krótszy bok pierwotnej działki miał 6 m. Odtwórz długość odpowiadającego boku większej działki.

Odpowiedź: 18 m

Ze skali pól 9 otrzymujemy skalę długości 3, a następnie mnożymy bok przez 3.