Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Suma ciągu arytmetycznego

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Kolejne wyrazy zapisujemy jako 7, $7+r$, $7+2r$ i $7+3r$. Suma daje $28+6r=54$, stąd $r=\frac{13}{3}$. Drugi wyraz wynosi $a_2=7+\frac{13}{3}=\frac{34}{3}$.

Odpowiedź: $\frac{34}{3}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. W ciągu arytmetycznym $a_2=8, a_7=18$. Wyznacz a_1 i różnicę.

Odpowiedź: $a_1=6, d=2$

Odejmujemy: $5d=10$. Pierwszy wyraz to $a_2-d=6$.

2. $a_1=6, d=2$. Oblicz sumę dziesięciu pierwszych wyrazów.

Odpowiedź: 150

$a_{10}=24$. Suma $10(6+24)/2=150$.

3. $a_n=6+(n-1)2$. Którym wyrazem jest liczba 22?

Odpowiedź: $n=9$

Równanie $6+(n-1)2=22$ daje n-1=8.

4. Suma pierwszych n wyrazów ciągu $2, 4, 6, \ldots$ wynosi 30. Wyznacz naturalne n.

Odpowiedź: $n=5$

$dn(n+1)/2=30$, więc $n^2+n-30=0$. Pierwiastki to 5 i -6; tylko 5 jest naturalne.

5. Wykaż, że w dowolnym ciągu arytmetycznym suma pięciu kolejnych wyrazów jest pięciokrotnością środkowego.

Odpowiedź: Suma wynosi 5 razy środkowy wyraz.

Zapisujemy wyrazy jako b-2 d,b-d,b,b+d,b+2 d. Po dodaniu składniki zawierające d znoszą się i zostaje 5 b.

6. Znajdź wszystkie rosnące ciągi arytmetyczne dodatnich liczb całkowitych, które mają co najmniej trzy wyrazy i sumę 21. Podaj pierwszy wyraz, różnicę i długość.

Odpowiedź: (a_1,d,n): $(6,1,3)$, $(5,2,3)$, $(4,3,3)$, $(3,4,3)$, $(2,5,3)$, $(1,6,3)$, $(1,1,6)$

Ze wzoru na sumę: $2\cdot 21 = n(2a_1+(n-1)d)$. Ponieważ $a_1, d \geq 1$, musi być $n(n+1)/2 \leq 21$. Dla każdej tak ograniczonej długości sprawdzamy dodatnie całkowite d i a_1; otrzymujemy dokładnie trójki (6, 1, 3), (5, 2, 3), (4, 3, 3), (3, 4, 3), (2, 5, 3), (1, 6, 3), (1, 1, 6).

2 / Małe kroki

1. $a_1=6, d=2$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 10

Trzeci wyraz jest o dwie różnice większy od pierwszego.

2. Oblicz różnicę ciągu zaczynającego się od $6, 8, 10$.

Odpowiedź: 2

Różnica dwóch kolejnych wyrazów jest stała.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1=6, d=2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 8

Dodajemy różnicę: $a_2=6+2=8$.

2. Początek ciągu: $6, 8, 10$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 2n + 6$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 8

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -2 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa B

1. $a_1 = 7, d = 3$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 10

Dodajemy różnicę: $a_2 = 7 + 3 = 10$.

2. Początek ciągu: $7, 10, 13$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 3

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 3n + 7$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 10

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -3 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa C

1. $a_1 = 8, d = 4$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 12

Dodajemy różnicę: $a_2 = 8 + 4 = 12$.

2. Początek ciągu: $8, 12, 16$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 4

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 4n + 8$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 12

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -4 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa D

1. $a_1 = 9, d = 5$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 14

Dodajemy różnicę: $a_2 = 9 + 5 = 14$.

2. Początek ciągu: $9, 14, 19$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 5

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 5n + 9$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 14

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -5 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 6, d = 2$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 14$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 6, a_5 = 14$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 2$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 6, a_4 = 12$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 36$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

Grupa B

1. $a_1 = 7, d = 3$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 19$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 7, a_5 = 19$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 3$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 7, a_4 = 16$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 46$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

5 / Matematyka w świecie

1. W pierwszym rzędzie jest 8 miejsc, a w każdym następnym o 2 więcej. Ile miejsc ma dziesiąty rząd?

Odpowiedź: 26

$a_{10} = 8 + 9 \cdot 2 = 26$.

2. W symulacji odkładasz 8 zł pierwszego dnia i codziennie o 2 zł więcej. Ile odłożysz przez 5 dni?

Odpowiedź: 60 zł

Piąta wpłata to 16. Suma $5(8 + 16)/2 = 60$.

3. W modelu pomiarowym odczyty co minutę to $8, 10, 12, \ldots$ mm. Przy stałym przyroście jaki będzie szósty odczyt?

Odpowiedź: 18 mm

Szósty odczyt jest o pięć różnic większy od pierwszego: $8 + 5 \cdot 2 = 18$.

4. Raport podaje $a_2 = 10$ oraz $a_5 = 16$ ciągu arytmetycznego. Odtwórz a_1 i d.

Odpowiedź: $a_1 = 8,\ d = 2$

Odejmujemy wyrazy: $3d = 6$. Następnie od a_2 odejmujemy jedną różnicę.