Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Dziedzina i znaki funkcji

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wykres przecina oś Ox w trzech punktach: $x = -\frac{7}{2}$, $x = -2$ i $x = 3$. Najwyższy punkt ma współrzędne $(2, 3)$. Wykres obejmuje argumenty $[-5, 4)$. Leży na osi lub nad nią dla $x \in [-\frac{7}{2}, 3]$.

Odpowiedź: $3;\ 2;\ [-5, 4);\ [-\frac{7}{2}, 3]$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Dana jest $f(x) = x + 3$ dla $-2 \le x < 0$ i $f(x) = 3 - x$ dla $0 \le x \le 3$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości.

Odpowiedź: $D = [-2, 3],\ W = [0, 3]$

Argumenty obejmują od -2 do 3. Pierwsza część daje wartości $[1, 3)$, druga $[0, 3]$; ich suma to drugi z tych przedziałów.

2. Dana jest $f(x) = x + 3$ dla $-2 \le x < 0$ i $f(x) = 3 - x$ dla $0 \le x \le 3$. Rozwiąż $f(x) = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$

Pierwszy wzór daje $x + 3 = 2$, czyli -1. Drugi daje $3 - x = 2$, czyli 1. Oba należą do właściwych części dziedziny.

3. Dana jest $f(x) = x + 3$ dla $-2 \le x < 0$ i $f(x) = 3 - x$ dla $0 \le x \le 3$. Podaj największą wartość i wszystkie argumenty jej osiągania.

Odpowiedź: $\max f = 3,\ x = 0$

W pierwszym przedziale wartości są mniejsze od 3, bo 0 jest wyłączone. Drugi wzór przyjmuje wartość 3 tylko w x=0.

4. Dana jest $f(x) = x + 3$ dla $-2 \le x < 0$ i $f(x) = 3 - x$ dla $0 \le x \le 3$. Wyznacz zbiór $\{x : f(x) > 1\}$.

Odpowiedź: $(-2, 2)$

Pierwsza nierówność daje x>-2, zatem (-2,0). Druga daje x<2, czyli [0,2). Suma przedziałów to (-2,2).

5. $g(x) = |x - 3| + |x - (7)|$. Wyznacz minimum g i wszystkie argumenty, dla których jest osiągane.

Odpowiedź: $\min g = 4,\ x \in [3, 7]$

Wyrażenie jest sumą odległości od 3 i 7. Między tymi punktami suma wynosi 4, a poza nimi jest większa.

6. Wyznacz, zależnie od m, liczbę rzeczywistych rozwiązań $|x - 3| + |x - (7)| = m$. Uzasadnij wszystkie przypadki.

Odpowiedź: 0 dla m<4; nieskończenie wiele dla m=4; 2 dla m>4.

Dla $x \le 3$ lewa strona to $10 - 2x$, dla $3 \le x \le 7$ wynosi 4, a dla $x \ge 7$ jest równa $2x - 10$. Stąd opis trzech przypadków.

2 / Małe kroki

1. $f(x) = x + 3$ dla $x \in [-2, 2]$. Oblicz f(1).

Odpowiedź: 4

Podstawiamy argument 1 do podanego wzoru.

2. $f(x) = |x - 3|$. Podaj minimum i argument minimum.

Odpowiedź: $0,\ x = 3$

Wartość bezwzględna jest nieujemna, a zeruje się, gdy wyrażenie wewnątrz jest zerem.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $f(x) = |x - 3|$. Oblicz $f(3)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 3$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 3

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-3, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x-3|=1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x=2$ i $x=4$.

Grupa B

1. $f(x)=|x-4|$. Oblicz $f(4)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x)=x+4$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 4

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-4,3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x-4|=1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x=3$ i $x=5$.

Grupa C

1. $f(x)=|x-5|$. Oblicz $f(5)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x)=x+5$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 5

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-5,3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x-5|=1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x=4$ i $x=6$.

Grupa D

1. $f(x)=|x-6|$. Oblicz $f(6)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x)=x+6$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 6

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-6,3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x-6|=1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x=5$ i $x=7$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $f(x)=|x-3|$. Uczeń szuka minimum.

Odpowiedź: min $f = 0$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna. Minimum to 0.

2. Wykres ma dziedzinę $(-2, 3]$.

Odpowiedź: Nie należy.

Okrągły nawias przy -2 wyłącza ten argument.

3. Rozwiązano $|x - 3| = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{1, 5\}$

Pominięto możliwość, że wyrażenie pod wartością bezwzględną wynosi -2.

Grupa B

1. $f(x) = |x - 4|$. Uczeń szuka minimum.

Odpowiedź: min $f = 0$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna. Minimum to 0.

2. Wykres ma dziedzinę $(-2, 3]$.

Odpowiedź: Nie należy.

Okrągły nawias przy -2 wyłącza ten argument.

3. Rozwiązano $|x - 4| = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{2, 6\}$

Pominięto możliwość, że wyrażenie pod wartością bezwzględną wynosi -2.

5 / Matematyka w świecie

1. Wędrówka jest opisana odległością od domu: $d(t) = t$ dla $0 \leq t \leq 5$, potem $d(t) = 2(5) - t$ aż do powrotu. Po jakim czasie nastąpi powrót?

Odpowiedź: 10 h

Drugi wzór zeruje się dla $t = 10$.

2. Taryfa wynosi 10 zł do 2 godzin włącznie i po 4 zł za każdą kolejną pełną godzinę. Oblicz koszt 5 godzin.

Odpowiedź: 22 zł

Za pierwsze dwie godziny płacimy 10 zł, a za trzy następne 12 zł; razem 22 zł.

3. W modelu temperatura $T(t) = 3 + |t - 5|$ °C dla $0 \leq t \leq 10$. Kiedy osiąga minimum?

Odpowiedź: $t = 5$

Dodana stała 3 nie zmienia argumentu minimum wartości bezwzględnej.

4. Model $d(x) = |x - p|$ opisuje odległość. Wiadomo, że $d(0) = 6$ i $p > 0$. Odtwórz p i wskaż punkt minimalnej odległości.

Odpowiedź: $p = 6,\ x = 6$

$|p| = 6$ i p>0, więc p=6. Odległość zeruje się w x=p.