Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Odejmowanie iloczynu wielomianów

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Najpierw mnożymy: $(x^3+1)(x-2) = x^4-2x^3+1x-2$. Odejmujemy cały iloczyn od x^4, zmieniając znaki składników. Zostaje $2x^3 - 1x + 2$.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $W(x) - V(x)H(x)$, gdy $W = x^4$, $V = x^3 + 4$, $H = x - 4$.

Odpowiedź: $4x^3 - 4x + 16$

$VH = x^4 - 4x^3 + 4x - 16$. Odejmujemy cały iloczyn od x⁴, zmieniając znaki; wyrazy czwartego stopnia się redukują.

2. Uprość $(x^2 + 4)(x^2 - 4) - x^4$.

Odpowiedź: -16

Iloczyn jest różnicą kwadratów: $x^4 - 16$. Po odjęciu x⁴ pozostaje -16.

3. Uprość $x^5 - (x^3 + 4)(x^2 - 4)$.

Odpowiedź: $4x^3 - 4x^2 + 16$

Iloczyn wynosi $x^5 - 4x^3 + 4x^2 - 16$. Odejmujemy go w całości, zachowując zmianę wszystkich znaków.

4. Wiadomo, że $u + v = 8$ i $uv = 1$. Oblicz $u^2 + v^2$.

Odpowiedź: 62

$u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = 64 - 2 = 62$.

5. Wykaż, że $(x^2 + 1)^2 \geq 4x^2$ dla każdego rzeczywistego x. Podaj warunek równości.

Odpowiedź: $x = \pm 1$

Różnica stron to $x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$. Równość zachodzi dokładnie, gdy $x^2 = 1$, czyli x=1 lub x=-1.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) takie, że $x^2 - y^2 = 80$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(21, 19), (12, 8), (9, 1)\}$

Rozkładamy: $(x - y)(x + y) = 80$. Oznaczmy dodatnie czynniki przez d i e, gdzie d<e. Muszą mieć tę samą parzystość, aby $x = (d + e)/2$ i $y = (e - d)/2$ były całkowite. Sprawdzamy dzielniki d do $\sqrt{80}$. Wszystkie dopuszczalne pary czynników dają dokładnie pary wskazane w odpowiedzi; każda po podstawieniu spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Wymnóż $x(x + 4)$.

Odpowiedź: $x^2 + 4x$

Mnożymy x przez każdy składnik nawiasu.

2. Uprość $x^2 - (x^2 + 4)$.

Odpowiedź: -4

Minus przed nawiasem zmienia oba znaki; kwadraty x się redukują.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Wymnóż $x(x + 4)$.

Odpowiedź: $x^2 + 4x$

Mnożymy x przez oba składniki.

2. Uprość $x^3 + x^3$.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy współczynniki podobnych wyrazów.

3. Wymnóż $2x^2 \cdot x$.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy wykładniki potęg o podstawie x.

4. Opuść nawias w $-(x^2+4)$.

Odpowiedź: $-x^2-4$

Minus zmienia znak każdego składnika nawiasu.

Grupa B

1. Wymnóż $x(x+5)$.

Odpowiedź: x^2+5x

Mnożymy x przez oba składniki.

2. Uprość x^3+x^3.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy współczynniki podobnych wyrazów.

3. Wymnóż $2x^2 \cdot x$.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy wykładniki potęg o podstawie x.

4. Opuść nawias w $-(x^2+5)$.

Odpowiedź: $-x^2-5$

Minus zmienia znak każdego składnika nawiasu.

Grupa C

1. Wymnóż $x(x+6)$.

Odpowiedź: x^2+6x

Mnożymy x przez oba składniki.

2. Uprość x^3+x^3.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy współczynniki podobnych wyrazów.

3. Wymnóż $2x^2 \cdot x$.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy wykładniki potęg o podstawie x.

4. Opuść nawias w $-(x^2+6)$.

Odpowiedź: $-x^2-6$

Minus zmienia znak każdego składnika nawiasu.

Grupa D

1. Wymnóż $x(x+7)$.

Odpowiedź: x^2+7x

Mnożymy x przez oba składniki.

2. Uprość x^3+x^3.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy współczynniki podobnych wyrazów.

3. Wymnóż $2x^2 \cdot x$.

Odpowiedź: $2x^3$

Dodajemy wykładniki potęg o podstawie x.

4. Opuść nawias w $-(x^2+7)$.

Odpowiedź: $-x^2-7$

Minus zmienia znak każdego składnika nawiasu.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwijano $(x+4)^2$.
Odpowiedź: $x^2+8x+16$
Brakuje podwojonego iloczynu składników.
2. Rozkładano x^2-16.
Odpowiedź: $(x-4)(x+4)$
Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.
3. Obliczano $x^2-(x+4)^2$.
Odpowiedź: $-8x-16$
Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

Grupa B

1. Rozwijano $(x+5)^2$.
Odpowiedź: $x^2+10x+25$
Brakuje podwojonego iloczynu składników.
2. Rozkładano x^2-25.
Odpowiedź: $(x-5)(x+5)$
Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.
3. Obliczano $x^2-(x+5)^2$.
Odpowiedź: $-10x-25$
Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

5 / Matematyka w świecie

1. Kwadratowy ogródek zwiększono z boku 4 m do 6 m. O ile wzrosło pole?
Odpowiedź: 20
$(4+2)^2-4^2=20\ \text{m}^2$.
2. Umowny koszt wynosi $K(x)=(x+4)^2$ zł. O ile $K(x)$ przewyższa x^2?
Odpowiedź: $8x+16$
Rozwijamy kwadrat i odejmujemy x^2. Pozostaje $8x+16$ zł.
3. Dwie kwadratowe powierzchnie do badań mają boki $t+4$ i $t-4$, gdzie $t>4$. Wyraź różnicę ich pól.
Odpowiedź: $16t$
Różnica pól jest różnicą kwadratów boków; po rozwinięciu pozostaje składnik liniowy.
4. Zadanie odwrócone: $(x+4)^2-x^2=56$. Wyznacz x.
Odpowiedź: 5
Po uproszczeniu $8x+16=56$. Stąd $x=5$.