Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Podzielność sumy potęg

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wyłączamy najmniejszą potęgę: $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} = 7^n(1 + 7 + 49) = 57 \cdot 7^n$. Liczba 57 jest wielokrotnością 19, a potęga przy $n \geq 0$ jest całkowita. To dowodzi podzielności.

Odpowiedź: $7^n(1 + 7 + 49)$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Wykaż, że $n(n + 1)$ jest parzyste dla każdego całkowitego n.

Odpowiedź: $2 \mid n(n + 1)$

Spośród dwóch kolejnych liczb całkowitych jedna jest parzysta, więc iloczyn zawiera czynnik 2.

2. Wykaż podzielność $4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2}$ przez 21 dla naturalnych n.

Odpowiedź: $21 \cdot 4^n$

Wyłączamy najmniejszą potęgę: $4^n(1 + 4 + 16) = 21 \cdot 4^n$.

3. Wykaż, że $n^3 - n$ jest podzielne przez 6 dla każdego całkowitego n.

Odpowiedź: $6 \mid n^3 - n$

$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Wśród trzech kolejnych liczb jest wielokrotność 3 i liczba parzysta. Iloczyn jest więc podzielny przez względnie pierwsze 2 i 3, czyli przez 6.

4. Znajdź wszystkie dodatnie całkowite n, dla których $n + 4$ dzieli $n^2 + 5$.

Odpowiedź: $\{3, 17\}$

Zapisujemy $n^2 + 5 = (n + 4)(n - 4) + 21$. Warunek jest równoważny temu, że dodatni dzielnik $d = n + 4 > 4$ dzieli 21. Przegląd takich dzielników daje dokładnie n wskazane w odpowiedzi.

5. Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

Odpowiedź: $8 \mid n^2 - 1$

$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Oba czynniki są parzyste i różnią się o 2, więc jeden z nich jest podzielny przez 4, a drugi przez 2. Iloczyn jest podzielny przez 8.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.

Odpowiedź: $24 \mid p^2 - 1$

Liczba pierwsza p>3 jest nieparzysta, więc poprzedni argument daje podzielność $p^2 - 1$ przez 8. Nie jest też wielokrotnością 3; zatem przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 lub 2, a jej kwadrat resztę 1. Stąd $p^2 - 1$ jest podzielne przez 3. Ponieważ 8 i 3 są względnie pierwsze, otrzymujemy podzielność przez 24.

2 / Małe kroki

1. Rozłóż na iloczyn $4n^2 + 4n$.

Odpowiedź: $4n(n + 1)$

Wyłączamy wspólny czynnik liczbowy oraz n.

2. Wyłącz 4^n w sumie $4^n + 4^{n+1}$.

Odpowiedź: $4^n(1 + 4)$

W drugim składniku pozostaje jeszcze jeden czynnik równy podstawie potęgi.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Wyłącz n w $n^2 + 4n$.

Odpowiedź: $n(n + 4)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $4n$ jest podzielne przez 4 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $4n + 1$ przez 4 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$4n$ jest wielokrotnością 4, a 1 jest mniejsze od 4.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa B

1. Wyłącz n w $n^2 + 5n$.

Odpowiedź: $n(n + 5)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $5n$ jest podzielne przez 5 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $5n + 1$ przez 5 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$5n$ jest wielokrotnością 5, a 1 jest mniejsze od 5.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa C

1. Wyłącz n w $n^2 + 6n$.

Odpowiedź: $n(n + 6)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $6n$ jest podzielne przez 6 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $6n + 1$ przez 6 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$6n$ jest wielokrotnością 6, a 1 jest mniejsze od 6.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa D

1. Wyłącz n w $n^2 + 7n$.

Odpowiedź: $n(n + 7)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $7n$ jest podzielne przez 7 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $7n + 1$ przez 7 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$7n$ jest wielokrotnością 7, a 1 jest mniejsze od 7.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Wyłączano czynnik 4 w $4n + 8$.

Odpowiedź: $4(n + 2)$

Po wyłączeniu czynnika dzielimy przez niego każdy składnik.

2. Badano parzystość $n(n + 1)$.

Odpowiedź: Jedna z kolejnych liczb jest parzysta.

Kolejne liczby mają przeciwne parzystości.

3. Z zapisu $N = 4k + 4$ wyciągnięto wniosek o reszcie.

Odpowiedź: $r = 0$

Reszta musi być mniejsza od dzielnika. Mamy $N = 4(k + 1)$.

Grupa B

1. Wyłączano czynnik 5 w $5n + 10$.

Odpowiedź: $5(n + 2)$

Po wyłączeniu czynnika dzielimy przez niego każdy składnik.

2. Badano parzystość $n(n + 1)$.

Odpowiedź: Jedna z kolejnych liczb jest parzysta.

Kolejne liczby mają przeciwne parzystości.

3. Z zapisu $N = 5k + 5$ wyciągnięto wniosek o reszcie.

Odpowiedź: $r = 0$

Reszta musi być mniejsza od dzielnika. Mamy $N = 5(k + 1)$.

5 / Matematyka w świecie

1. W magazynie jest $4n + 12$ sztuk. Wykaż, że można je podzielić na pełne paczki po 4.

Odpowiedź: $n + 3$ paczek

$4n + 12 = 4(n + 3)$, więc liczba pełnych paczek wynosi n+3.

2. Fundusz wynosi $n^2 - 1$ zł, gdzie n jest dodatnie i nieparzyste. Wykaż, że można go rozdzielić równo na 8 całozłotowych części.

Odpowiedź: podział jest możliwy

Z dowodu podzielności $(n - 1)(n + 1)$ przez 8 wynika, że każda część wynosi całkowitą liczbę złotych.

3. Plan pomiarów przewiduje $4^k(1 + 4 + 16)$ odczytów. Ile pełnych serii po 21 odczytów można wykonać?

Odpowiedź: 4^k

Nawias wynosi 21; całkowita liczba pomiarów to $21 \cdot 4^k$.

4. Zadanie odwrócone: liczba $N = 4k + r$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1. Jeśli $0 \leq r < 4$, wyznacz r.

Odpowiedź: 1

Jednoznaczność reszty z dzielenia wymusza r=1.