Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Rozkład wielomianu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wyłączamy x przed nawias: $x(x^2-2x+1)$. Wyrażenie w nawiasie jest kwadratem różnicy, więc wynik to $x(x-1)^2$. Odpowiedź: A.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz x^2+6x+9 dla $x=\sqrt{4}-3$.

Odpowiedź: 4

Wyrażenie to $(x+3)^2$, więc po podstawieniu zostaje $(\sqrt{4})^2=4$.

2. Uprość $(x+3)^2-(x-3)^2$.

Odpowiedź: $12x$

Po rozwinięciu kwadraty x i stałe się redukują; pozostają dwa składniki liniowe.

3. Rozłóż na czynniki x^3-6x^2+9x.

Odpowiedź: $x(x-3)^2$

Wyłączamy x: $x(x^2-6x+9)$. Nawias jest kwadratem różnicy.

4. Wiadomo, że $u+v=6$ i $uv=1$. Oblicz u^2+v^2.

Odpowiedź: 34

$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=36-2=34$.

5. Wykaż, że $(x^2+1)^2\geq 4x^2$ dla każdego rzeczywistego x. Podaj warunek równości.

Odpowiedź: $x=\pm 1$

Różnica stron to $x^4+2x^2+1-4x^2=(x^2-1)^2\geq 0$. Równość zachodzi dokładnie, gdy $x^2=1$, czyli x=1 lub x=-1.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) takie, że $x^2-y^2=48$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(13,11),(8,4),(7,1)\}$

Rozkładamy: $(x-y)(x+y)=48$. Oznaczmy dodatnie czynniki przez d i e, gdzie d<e. Muszą mieć tę samą parzystość, aby $x=(d+e)/2$ i $y=(e-d)/2$ były całkowite. Sprawdzamy dzielniki d do $\sqrt{48}$. Wszystkie dopuszczalne pary czynników dają dokładnie pary wskazane w odpowiedzi; każda po podstawieniu spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Rozwiń $(x+3)^2$.

Odpowiedź: x^2+6x+9

Korzystamy z $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż na czynniki x^2-9.

Odpowiedź: $(x-3)(x+3)$

To różnica kwadratów: $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Rozwiń $(x+3)^2$.

Odpowiedź: x^2+6x+9

Wzór: $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż x^2-9.

Odpowiedź: $(x-3)(x+3)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(3+1)^2-(3-1)^2$.

Odpowiedź: 12

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 6 = 12$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $3x^2 + 6x$.

Odpowiedź: $3x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa B

1. Rozwiń $(x + 4)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 8x + 16$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 16$.

Odpowiedź: $(x - 4)(x + 4)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(4 + 1)^2 - (4 - 1)^2$.

Odpowiedź: 16

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 8 = 16$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $4x^2 + 8x$.

Odpowiedź: $4x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa C

1. Rozwiń $(x + 5)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 10x + 25$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 25$.

Odpowiedź: $(x - 5)(x + 5)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(5 + 1)^2 - (5 - 1)^2$.

Odpowiedź: 20

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 10 = 20$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $5x^2 + 10x$.

Odpowiedź: $5x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa D

1. Rozwiń $(x + 6)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 12x + 36$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 36$.

Odpowiedź: $(x - 6)(x + 6)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(6 + 1)^2 - (6 - 1)^2$.

Odpowiedź: 24

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 12 = 24$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $6x^2 + 12x$.

Odpowiedź: $6x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwijano $(x+3)^2$.
Odpowiedź: x^2+6x+9
Brakuje podwojonego iloczynu składników.
2. Rozkładano x^2-9.
Odpowiedź: $(x-3)(x+3)$
Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.
3. Obliczano $x^2-(x+3)^2$.
Odpowiedź: $-6x-9$
Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

Grupa B

1. Rozwijano $(x+4)^2$.
Odpowiedź: $x^2+8x+16$
Brakuje podwojonego iloczynu składników.
2. Rozkładano x^2-16.
Odpowiedź: $(x-4)(x+4)$
Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.
3. Obliczano $x^2-(x+4)^2$.
Odpowiedź: $-8x-16$
Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

5 / Matematyka w świecie

1. Kwadratowy ogródek zwiększono z boku 3 m do 5 m. O ile wzrosło pole?
Odpowiedź: 16
$(3+2)^2-3^2=16\ \text{m}^2$.
2. Umowny koszt wynosi $K(x)=(x+3)^2$ zł. O ile $K(x)$ przewyższa x^2?
Odpowiedź: $6x+9$
Rozwijamy kwadrat i odejmujemy x^2. Pozostaje $6x+9$ zł.
3. Dwie kwadratowe powierzchnie do badań mają boki $t+3$ i $t-3$, gdzie $t>3$. Wyraź różnicę ich pól.
Odpowiedź: $12t$
Różnica pól jest różnicą kwadratów boków; po rozwinięciu pozostaje składnik liniowy.
4. Zadanie odwrócone: $(x+3)^2-x^2=33$. Wyznacz x.
Odpowiedź: 4
Po uproszczeniu $6x+9=33$. Stąd $x=4$.